PRIJSVRAAG

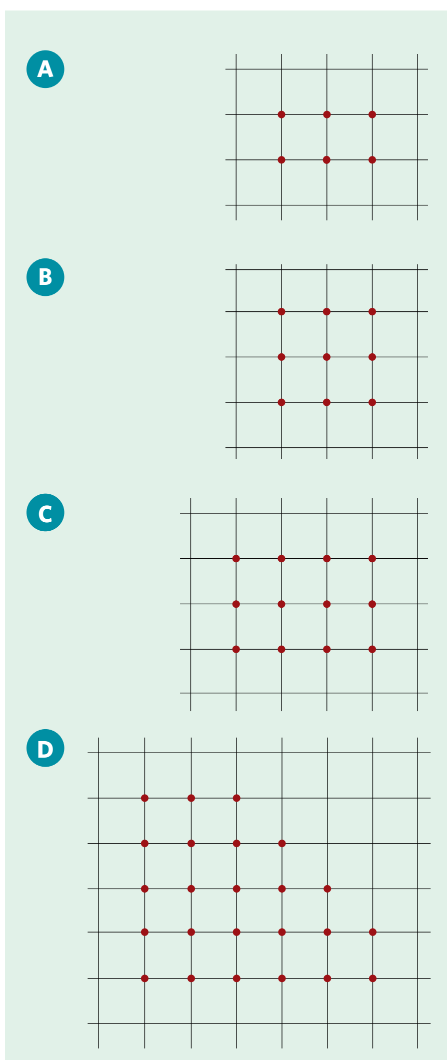
Door **Arnout Jaspers**

Dubbelklik

DE FIGUREN A, B, C EN D stellen mini-internetjes voor. Elk bolletje is een webpagina. De opgave in elke afbeelding is, de pagina's zodanig aan elkaar te linken dat alle pagina's onderling bereikbaar zijn in maximaal drie muisklikken.

Een link tussen twee pagina's is een rechte lijn tussen twee bolletjes. Op het echte internet is een link enkelzijdig, maar hier tweezijdig: als pagina X linkt naar pagina Y, linkt Y ook naar X. Een link mag niet door een derde bolletje gaan (je mag wel doen alsof een bolletje verwaarloosbaar klein is), en links mogen elkaar niet kruisen. In elke figuur geldt een maximum voor het aantal links per pagina: A) 3 ; B) 4 ; C) 5 ; D) 8

Aan theoretici de abstracte vraag: hoeveel webpagina's kun je aan elkaar linken met maximaal M links per pagina en alle pagina's onderling bereikbaar met maximaal N muisklikken? Bekijk zowel het geval dat de links enkelzijdig zijn (zoals op internet) als dubbelzijdig. Maar wellicht staat dit gewoon in de leerboeken grafentheorie.



Doe mee

Zorg dat de oplossing uiterlijk 7 juni bij de prijsvraagredactie is: *NWT*, Postbus 256, 1110 AG Diemen, of **prijsvraag@natutech.nl** o.v.v. Prijsvraag juni

De winnaar ontvangt een cadeaubon voor *NWT*-producten ter waarde van ¤ **35,-**
In het juli/augustus-nummer is er geen reguliere prijsvraag, maar de grote zomerpuzzel.

Oplossing mei
Gegeven de Fibonacci-getallen 1,1,2,3,5,8,13,....., wat is het laatste cijfer van F(10^{24}), het 1.000.000.000.000.000.000.000.000e Fibonacci-getal? Aangezien elke F bestaat uit de som van zijn twee voorgangers, wordt het laatste cijfer bepaald door de som van de laatste cijfers van zijn voorgangers.
Je kunt dus meteen van elke F het laatste cijfer opschrijven:
1,1,2,3,5,8,3,1,4,5,9,4,3,7,0,7,7,4,1,5,
6,1,7,8,5,3,8,1,9,0,9,9,8,7,5,2,7,9,6,5,
1,6,7,3,0,3,3,6,9,5,4,9,3,2,5,7,2,9,1,0,
1,1,2,3,....

Zodra twee opeenvolgende getallen zich – in dezelfde volgorde – herhalen, is de rij als geheel gedoemd zich te herhalen. Omdat maar honderd combinaties van twee getallen onder de tien bestaan, hoef je hoogstens honderd F's uit te rekenen. De periode blijkt in dit geval slechts 60 te zijn.

Nu de rest van 10^{24} gedeeld door 60 uitrekenen. Het treft dat de rest modulo 60 van elke macht van 10 gelijk is aan 40 (100- 60 = 40, 1000 - 16 x 60 = 40, enz.). Het 40e getal van het rijtje hierboven is 5, dus dat is het laatste cijfer van F(10^{24}).

Voor de tribonacci-rij gaat alles *mutatis mutandis* hetzelfde, die vervalt al bij de 31e term in herhaling. De rest van 10^{24} gedeeld door 31 is 16. Dit kan met een online rekenmachine, of maak bijvoorbeeld gebruik van $10^{24} / 31 = (10^6)^4 / 31 =$ (veelvoud van 31 + 2)^4 = (veelvoud van 31) + 2^4.

De twee, respectievelijk drie laatste cijfers van F moeten zich na hoogstens $(10^2)^2$ = 10.000 respectievelijk $(10^3)^2$ = 1.000.000 termen herhalen, voor de tribonacci-rij is de periode hoogstens $(10^2)^3$ = 1.000.000 en $(10^3)^3$ = 1.000.000.000. Dat gaat uw puzzelredacteur niet meer met pen en papier uitproberen.

Arie Bos onderzocht de periodiciteit van Fibonacci, tribonacci, tetrabonacci,... wat betreft de laatste n cijfers. Opmerkelijk: na een onregelmatig begin stijgt de periode voor alle rijen met een factor 10 voor ieder eindcijfer méér. Zo herhalen de laatste drie cijfers van de Fibonacci-rij zich met periode 1500, de laatste vier cijfers met periode 15.000, de laatste vijf cijfers met 150.000 en voor de tribonacci-rij en volgende rijen geldt iets soortgelijks. Vreemd genoeg struikelde Bos over het uitrekenen van F(10^{24}), zodat de prijs aan hem voorbij gaat.

In plaats daarvan bekronen we Jan van Delden. Ook hij vond de mysterieuze groeifactor 10, en vond door slim programmeren de laatste *zeven* cijfers van de 10^{24}e term van Fibonacci, tribonacci en tetrabonacci, respectievelijk: 0546875, 5087103, 341318.